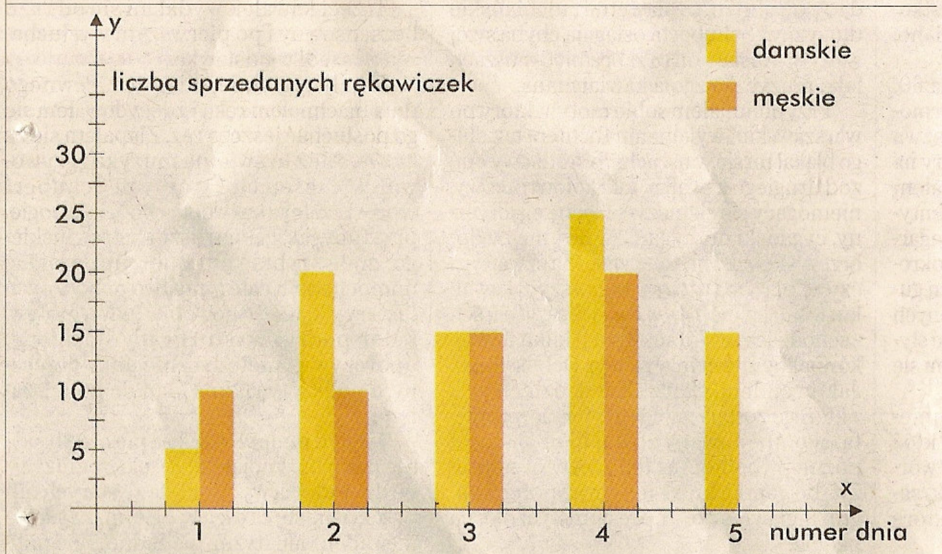
matematyka - poziom podstawowy

czas pracy 120 minut

Wykres do zadania 1



Zadanie 1. (3 pkt)

Wykres prezentuje sprzedaż rękawiczek w kolejnych dniach pewnego tygodnia. Oblicz, ile co najmniej par rękawiczek męskich należy sprzedać w piątym dniu, aby ich średnia sprzedaż z pięciu dni była większa od średniej sprzedaży rękawiczek damskich w tych dniach.

Zadanie 2. (5 pkt)

Pan Krzysztof ma w portfelu tylko banknoty o nominałach 100 zł i 200 zł i nie ma monet. Pan Krzysztof obliczył, że „w jednym banknocie" ma średnio 120 zł. Oblicz, jakim procentem wszystkich banknotów w portfelu są banknoty o nominale 100 zł.

Zadanie 3. (3 pkt)

W trójkącie prostokątnym ABC ($|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$) poprowadzono odcinek DE równoległy do boku BC i odcinek EF równoległy do boku AB. Punkt D dzieli bok AB w stosunku 8:5, licząc od punktu B. Oblicz, stosunek pola koła wpisanego w trójkąt DEA do pola koła wpisanego w trójkąt FCE.

Zadanie 4. (4 pkt)

Liczby $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ są miejscami zerowymi wielomianu $W(x) = 4x^3 + ax^2 - bx - 2$. Wyznacz a i b oraz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Zadanie 5. (5 pkt)

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + ax + b$ są najmniejsza i największa liczba spełniające nierówność $|x-2| \le 3$. Wyznacz współczynniki a i b i zapisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

Zadanie 6. (4 pkt)

Punkty $A = (-1,-9)$, $B = (4,6)$, $C = (-6,1)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez wierzchołek C i środek boku AB tego trójkąta.

Zadanie 7. (4 pkt)

Liczby $0,(9)$, $\cos 45^\circ$, $\frac{1}{2}\sin 45^\circ$ są pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu geometrycznego (b_n). Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów ciągu (b_n). Wynik podaj w postaci ułamka o całkowitym mianowniku.

Zadanie 8. (6 pkt)

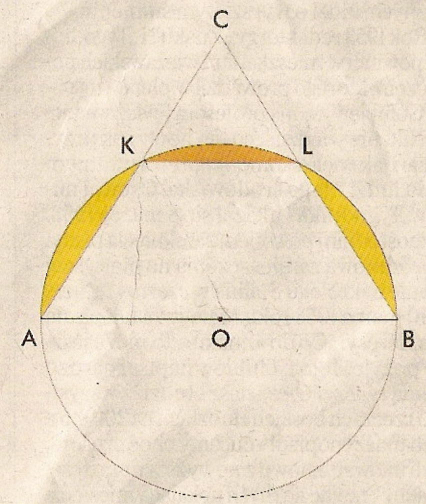
Punkty $A = (-5,-5)$ i $B = (5,-5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, w którym kąt o wierzchołku w punkcie C jest prosty. Bok AC tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $y = 2x + 5$. Narysuj rysunek pomocniczy i oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 9. (4 pkt)

Liczby $3x-5$, x^2+3, $5x+3$ są w podanej kolejności pierwszym drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n). Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

Zadanie 10. (5 pkt)

Bok AB trójkąta równobocznego o boku długości 10 cm jest średnicą okręgu, który przecina pozostałe boki trójkąta w punktach K i L (patrz rysunek). Oblicz sumę pól zacieniowanych figur.



Zadanie 11. (6 pkt)

Podstawą graniastosłupa prostego jest kwadrat. Przekątna graniastosłupa ma długość 6 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej kąt 30°. Narysuj rysunek pomocniczy i oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 12. (3 pkt)

Ze zbioru złożonego z czterech boków kwadratu i obu jego przekątnych losujemy kolejno dwa razy po jednym odcinku bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że drugi odcinek będzie dłuższy od pierwszego. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Odpowiedzi:

(Każda kropka „•” to jeden punkt)

Zadanie 1. (3 pkt)

• Obliczenie średniej sprzedaży rękawiczek damskich.

$\frac{80}{5}=16$

• Ułożenie i rozwiązanie nierówności.

$\frac{55+x}{5}>16$, gdzie x liczba rękawiczek męskich sprzedanych w piątym dniu.

$x>25$

• Wyznaczenie najmniejszej liczby całkowitej spełniającej nierówność $x>25$ i sformułowanie odpowiedzi.

Należy sprzedać co najmniej 26 par rękawiczek męskich.

Zadanie 2. (5 pkt)

• Wprowadzenie oznaczeń, na przykład
x - liczba banknotów o nominale 100 zł,
y - liczba banknotów o nominale 200 zł,
$x+y$ - liczba wszystkich banknotów.

• Stwierdzenie, że banknoty o nominale 100 zł to $\frac{x}{x+y}\cdot 100\%$ liczby wszystkich banknotów.

• Ułożenie równania.

$\frac{100x+200y}{x+y}=120$

• Wyznaczenie x z równania.

$\frac{100x+200y}{x+y}=120$

$100x+200y=120x+120y$

$-2x=-8y$

$x=4y$

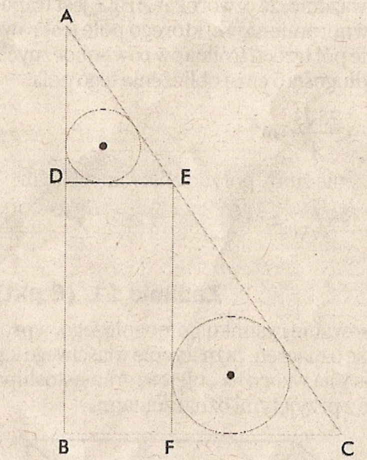
• Obliczenie procentu.

$x=4y$

$\frac{4y}{5y}\cdot 100\%=80\%$

Zadanie 3. (3 pkt)

• Analiza warunków zadania (rysunek) i stwierdzenie podobieństwa trójkątów, w które wpisane są koła.



$\triangle DEA \sim \triangle FCE$, bo $DE \parallel BC$ i $EF \parallel AB$.

• Obliczenie skali podobieństwa trójkąta DEC do trójkąta FEA.

$\frac{|EF|}{|AD|}=\frac{|BD|}{|AD|}=\frac{8}{5}$, bo czworokąt $BFED$ jest prostokątem, w którym $|FE|=|BD|$.

• Obliczenie stosunku pola koła wpisanego w trójkąt DEA do pola koła wpisanego w trójkąt FCE.

$\frac{r_{DEA}}{r_{FEC}}=\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$.

Uwaga. *Zauważ, że nie musisz obliczać promieni tych okręgów.*

Zadanie 4. (4 pkt)

• Ułożenie układu równań.

$$\begin{cases} 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=0 \\ 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-2=0 \end{cases}$$

• Przekształcenie i rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} \frac{a}{4}+\frac{b}{2}=\frac{5}{2} \\ \frac{a}{4}-\frac{b}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$a=8,\ b=1$

• Zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej.

$4x^3+8x^2-x-2=4x^3-x+8x^2-2=$

$x\left(4x^2-1\right)+2\left(4x^2-1\right)=\left(4x^2-1\right)(x+2)=$

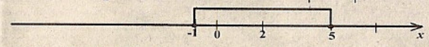
$=(2x-1)(2x+1)(x+2)$

• Obliczenie trzeciego pierwiastka.

$x=-2$

Zadanie 5. (5 pkt)

• Zaznaczenie na osi liczbowej przedziału opisanego za pomocą nierówności $|x-2|\le 3$.



• Zapisanie miejsc zerowych funkcji f

$x_1=-1, x_2=5$

• Obliczenie współczynników a i b.

$f(5)=2\cdot 5^2+5a+b=0$

$f(-1)=2\cdot(-1)^2-a+b=0$

$$-\begin{cases} 5a+b=-50 \\ -a+b=-2 \end{cases}$$

$6a=-48$

$a=-8$

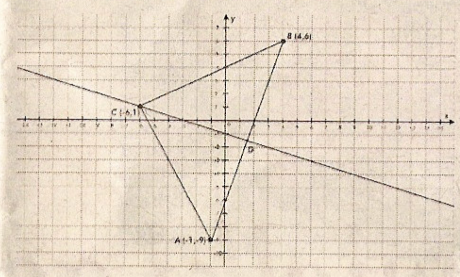
$b=-10$

• Zapisanie wzoru funkcji f w postaci iloczynowej.

$f(x)=2x^2-8x-10=2(x+1)(x-5)$

Zadanie 6. (4 pkt)

• Wprowadzenie oznaczeń i analiza warunków zadania, na przykład rysunek.



• Obliczenie współrzędnych punktu D - środka odcinka AB.

$D=\left(\frac{4+(-1)}{2},\frac{6+(-9)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

• • Wyznaczenie równania prostej CD, na przykład z wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty i przekształcenie go do postaci równania kierunkowego.

$C=(-6,1), D=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$(y-1)\left(\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{3}{2}-1\right)(x+6)=0$

$(y-1)\left(\frac{15}{2}\right)+\frac{5}{2}(x+6)=0$

$\frac{15}{2}y-\frac{15}{2}-\frac{5}{2}x+\frac{30}{2}=0$

$15y-15+5x+30=0$

$3y-3+x+6=0$

$y=-\frac{1}{3}x-1$

Zadanie 7. (4 pkt)

• Wprowadzenie oznaczeń i analiza warunków zadania.

$b_1=0,(9)=1$

$b_2=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b_4=\frac{1}{2}\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}$

• Obliczenie ilorazu q ciągu (b_n)

$q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

• Obliczenie sumy S_{10} dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

$$S_{10}=\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{31}{32}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{31}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{31}{16}\cdot\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

Dokończenie na – s. 40 ►►►

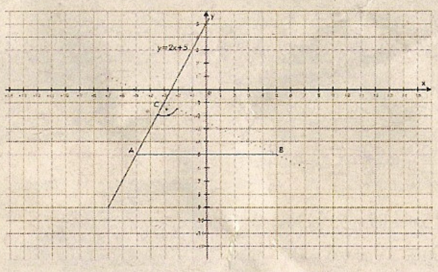
▶▶▶ Dokończenie ze s. 39

• Podanie wyniku w wymaganej postaci.

$$\frac{31\left(2+\sqrt{2}\right)}{32}$$

Zadanie 8. (6 pkt)

• Narysowanie rysunku pomocniczego i analiza warunków zadania.



• Wyznaczenie równania prostej zawierającej bok BC trójkąta ABC.

$-5=-\frac{1}{2}\cdot 5+b$

$b=-\frac{5}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ - prosta prostopadła do prostej $y=2x+5$ i przechodząca przez punkt $B=(5,-5)$

• Wyznaczenie współrzędnych punktu C

$-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=2x+5$

$-x-5=4x+10$

$-5x=15$

$x=-3,\ \ y=-1$

$C=(-3,-1)$

• Obliczenie długości odcinków AC i BC

$|AC|=\sqrt{(-3+5)^2+(-1+5)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$|BC|=\sqrt{(-3-5)^2+(-1+5)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

• Obliczenie pola P trójkąta ABC

$P=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}=4\sqrt{25}=20$

Zadanie 9. (4 pkt)

• Ułożenie i rozwiązanie równania oraz wyznaczenie x.

$x^2+3=\frac{5x+3+3x-5}{2}$

$x^2-4x+4=0$

$\Delta=0$

$x=2$

• Obliczenie pierwszego wyrazu ciągu i różnicy r ciągu (a_n)

$a_1=1, r=6$

• Obliczenie szóstego wyrazu ciągu (a_n)

$a_6=1+30=31$

Zadanie 10. (5 pkt)

• • Zauważenie, że suma pól zacieniowanych figur jest równa różnicy połowy pola koła o promieniu 5 cm i czworokąta $ABLK$, i obliczenie połowy pola koła.

$\frac{1}{2}\pi\cdot 5^2=12{,}5\pi\ \text{cm}^2$

• • Zauważenie, że czworokąt $ABKL$ jest trapezem równoramiennym, którego pole jest równe sumie pól trzech trójkątów równobocznych o boku długości 5 cm, i obliczenie tego pola.

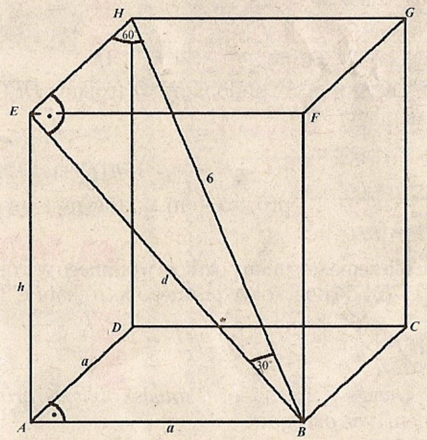
$3\cdot\frac{5^2\sqrt{3}}{4}=\frac{75\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$

• Obliczenie sumy pól zacieniowanych figur.

$12{,}5\pi-\frac{75\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$

Zadanie 11. (6 pkt)

• Narysowanie rysunku pomocniczego, wprowadzenie oznaczeń, zaznaczenie właściwego kąta i zapisanie wzoru na objętość graniastosłupa zgodnie z przyjętymi oznaczeniami.



• Zapisanie wzoru na objętość graniastosłupa zgodnie z przyjętymi oznaczeniami.

$V=a^2\cdot h$

• Obliczenie długości przekątnej (d) ściany bocznej, na przykład z własności trójkąta prostokątnego - „połowy" trójkąta równobocznego.

$d=3\sqrt{3}$ cm

• Zauważenie, że $|AB|=|EH|=a$ i obliczenie długości krawędzi podstawy, na przykład z własności trójkąta prostokątnego - „połowy" trójkąta równobocznego.

$a=3$ cm

• Obliczenie wysokości (h) graniastosłupa.

$h^2+3^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2$

$h=\sqrt{27-9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ cm

• Obliczenie objętości graniastosłupa.

$V=3^2\cdot 3\sqrt{2}=27\sqrt{2}\ \text{cm}^3$.

Zadanie 12. (3 pkt)

• Opisanie zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω i obliczenie $|\Omega|$.

$|\Omega|=6\cdot 5=30$

• Obliczenie mocy zbioru zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A - drugi odcinek będzie dłuższy od pierwszego.

$|A|=4\cdot 2=8$

• Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A)$

$P(A)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

OPRACOWANIE
ANNA ZALEWSKA